5　関数・関数と図形

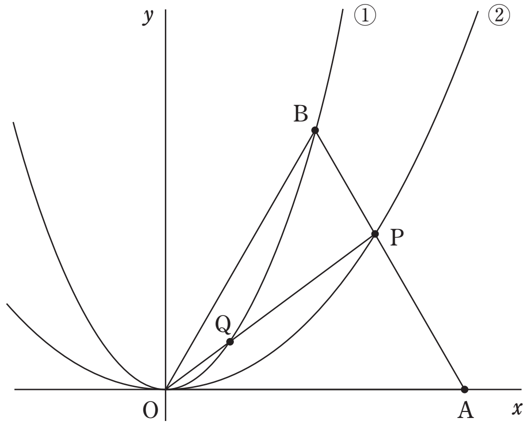
<5−1>　東京学芸大学附属高等学校（東京都）

下図のように，①は関数 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ のグラフであり，②は関数 $y=ax^2$ のグラフである。ただし，$0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ とする。点 A は x 軸上の点であり，その x 座標は正である。①上に点 B を △OAB が正三角形となるようにとる。また，辺 AB と②との交点を P，直線 OP と①の交点のうち，点 O とは異なる点を Q とする。このとき，次の各問いに答えなさい。

⑴　点 B の座標を求めなさい。

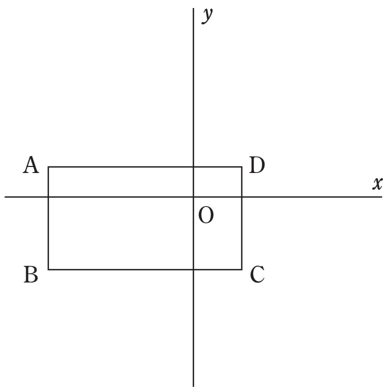
⑵　∠APO＝90° となるとき，a の値を求めなさい。

⑶　OQ＝QP となるとき，点 P の座標を求めなさい。



<5−2>　お茶の水女子大学附属高等学校（東京都）

右図のように，x 軸，y 軸に平行な辺を持つ長方形 ABCD があり，点 B の座標は(−6，−3)，点 D の x 座標は 2 である。また，双曲線 $y=\frac{k}{x}$（k は定数）は，2 点 A，C を通る。このとき，次の各問いに答えなさい。



⑴　定数 k の値，および 2 点 A，C を通る直線の式を求めなさい。

⑵　直線 AC が点 C を通る放物線 $y=ax^2$（a は定数）と 2 点 C，E で交わっている。点 E の座標を求めなさい。

⑶　⑵で求めた点 E を y 軸に関して対称移動した点を F とする。

① 点Fの座標を求めなさい。

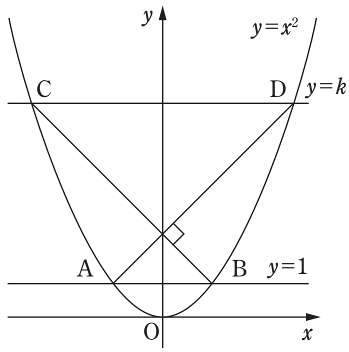
② 次の2つの条件をともに満たす点Pの座標をすべて求めなさい。

・長方形ABCDの辺上にある。

・三角形CEPの面積と三角形CEFの面積は等しい。

＜5－3＞　大阪星光学院高等学校（大阪府）

右図のように，放物線 $y=x^2$……①と直線 $y=1$ との交点をA，Bとし，①と直線 $y=k$ との交点をC，Dとする。ただし，$k>1$ とする。AとD，BとCを結ぶと，AD⊥BCとなった。

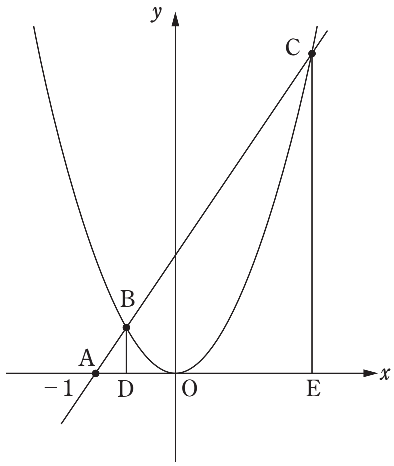


(1) k の値を求めなさい。

(2) 点E(0，5)を通る直線の傾きを m とするとき，この直線が線分AB(両端を含む)と交わるような m の値の範囲を不等式で表しなさい。また，五角形ECABDの面積を求めなさい。

＜5－4＞　東大寺学園高等学校（奈良県）

右図のように，2次関数 $y=ax^2\,(a>0)$ のグラフと，A(−1，0)を通る傾きが正の直線がB，Cで交わっており，AB：BC＝1：24である。B，Cから x 軸にひいた垂線と x 軸との交点をそれぞれD，Eとするとき，次の各問いに答えなさい。



(1) Dの x 座標を求めなさい。

(2) O，E，C，Bが一つの円周上にあるとき，a の値を求めなさい。

＜5－1＞ 東京学芸大学附属高等学校（東京都）

関数と図形が絡んだ問題は数学の総合問題の形をとることが多い。グラフの交点を求めるときには，方程式，連立方程式，2 次方程式を的確に解く力も要求される。

(1) 点 B から x 軸に垂線 BH を引くと，△OAB が正三角形なので，△BOH は内角の大きさが 30°，60°，90° の直角三角形となる。OH：BH＝1：$\sqrt{3}$ なので，点 B の x 座標を m とすると，B$(m,\ \sqrt{3}m)$

点 B が $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ のグラフ上にあるから，

$\sqrt{3}m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}m^2$　　両辺を 2 倍して $\sqrt{3}$ で割ると，$2m=m^2$　　$m(m-2)=0$　$m=2$

よって，B$(2,\ 2\sqrt{3})$

(2) 点 P から x 軸に垂線 PI を引く。

∠APO＝90° のとき，AP＝BP なので，

AI：AH＝PI：BH＝AP：AB＝1：2

AH＝HO なので，A(4, 0) だから，

I(3, 0)　　また，BH＝$2\sqrt{3}$ だから，

PI＝$\sqrt{3}$　　P$(3,\ \sqrt{3})$

よって，$\sqrt{3}=a\times3^2$　　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

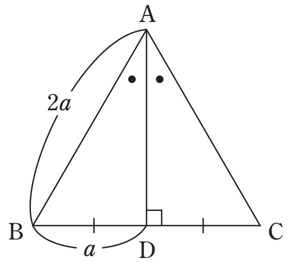
(3) OQ＝QP のとき，OQ：OP＝1：2

よって，点 P の x 座標，y 座標はそれぞれ点 Q の x 座標，y 座標の 2 倍となる。このことを利用してみよう。

点 Q の x 座標を n とすると，y 座標は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}n^2$

よって，P$(2n,\ \sqrt{3}n^2)$

ポイント

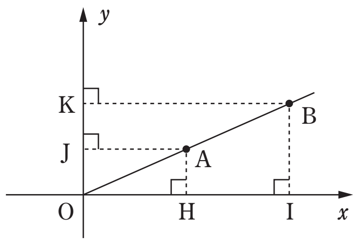


正三角形の 3 辺や高さについて確認しておこう。

図で示すように，正三角形は 1 つの角の二等分線が対辺の垂直二等分線と一致する。図で，BC の中点を D とすると，AB：BD＝2：1　　BD＝a とすると，AB＝$2a$　　△ABD で三平方の定理を用いると，AD＝$\sqrt{4a^2-a^2}=\sqrt{3}a$

なお，△ABD は内角の大きさが 30°, 60°, 90° の直角三角形である。つまり，内角の大きさが 30°，60°，90° の直角三角形の 3 辺の比は 2：1：$\sqrt{3}$ である。

ポイント



上の図で，OA：OB＝m：n のとき，OH：OI＝OJ：OK＝m：n となる。

点 P は直線 AB 上にあるので，直線 AB の式を求めてみよう。

直線 AB は傾きが$-\sqrt{3}$で$(2,\ 2\sqrt{3})$を通るから，切片を b とすると，

$2\sqrt{3}=-\sqrt{3}\times2+b$　　$b=4\sqrt{3}$なので，直線 AB の式は，$y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$

$P(2n,\ \sqrt{3}n^2)$を代入すると，$\sqrt{3}n^2=-2\sqrt{3}n+4\sqrt{3}$

両辺を$\sqrt{3}$で割って整理すると，$n^2+2n-4=0$　　2 次方程式の解の公式を用いると，

$n=\dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$　　$n>0$ なので，$n=-1+\sqrt{5}$　　よって，点 P の x 座標は，$2n=-2+2\sqrt{5}$　　点 P の y 座標は，$\sqrt{3}\times(-1+\sqrt{5})^2=\sqrt{3}(6-2\sqrt{5})$

$=6\sqrt{3}-2\sqrt{15}$　　よって，$\mathrm{P}(-2+2\sqrt{5},\ 6\sqrt{3}-2\sqrt{15})$

＊　直線 OQ の式や放物線②の式，直線 AB の式を表しながら進めてみよう。

点 Q の x 座標を n とすると，y 座標は$\dfrac{\sqrt{3}}{2}n^2$

よって，直線 OQ の傾きは$\dfrac{\sqrt{3}}{2}n^2\div n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}n$

なので，直線 OQ の式は，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}nx$　　また，$P(2n,\ \sqrt{3}n^2)$と表せるから，$y=ax^2$ に代入して，$\sqrt{3}n^2=a\times4n^2$　　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　放物線②の式は，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

ここで，上の解説のようにして直線 AB の式を求めると，$y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$

よって，点 P の x 座標は，

　方程式$\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$の解として求められる。

ポイント

グラフの交点の座標は，グラフを表す 2 式を連立方程式とみることで，その座標を表すことができる。

$y=ax^2$…①，$y=px+q$…②

$y=mx+n$…③であるとすると，

②と③の交点の x 座標は，

　方程式 $px+q=mx+n$ の解として求められ，

①と③の交点の x 座標は，

　方程式 $ax^2=mx+n$ の解として求められる。

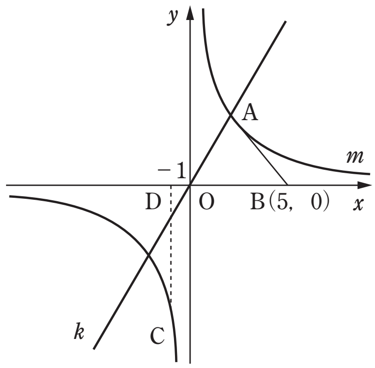
両辺を 4 倍して$\sqrt{3}$でわると，$x^2=-4x+16$　　$x^2+4x-16=0$　　2 次方程式の解の公式を用いて，$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{80}}{2}=-2\pm2\sqrt{5}$　　$x>0$ なので，$x=-2+2\sqrt{5}$　　y 座標は $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$　　または，$y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$に代入して求める。

＊　直線 OP の式を $y=px$ として進めてもよい。すると，点 Q の x 座標は方程式

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2=px$ の解として求められる。$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2-px=0$　　$x\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-p\right)=0$

＜類題 1＞　函館ラ・サール高等学校

$a>0$ とする。右図のように，双曲線 $y=\frac{a}{x}$ と直線 $y=2x$ があり，それぞれを m，k とする。



この双曲線 m と直線 k の2つの交点のうち，x 座標が正である点をAとおく。また，点B(5, 0)とし，双曲線 m 上で x 座標が-1の点をC，点Cを通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点をDとする。△AOBの面積が 10cm^2 のとき，次の各問いに答えなさい。ただし，座標の1目盛りを1cmとする。

(1)　a の値を求めなさい。

(2)　点Cと(4, 7)を通る直線を l とする。直線 l の式を求めなさい。

(3)　直線 l と直線 k の交点の座標を求めなさい。

(4)　直線 l と y 軸との交点をEとする。線分OD, DC, CE, EB, BOで囲まれる図形ODCEBの面積を求めなさい。

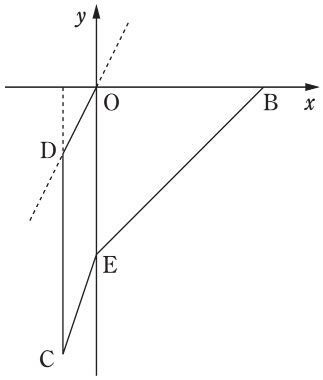
【解法】

(1)　△AOBはOBを底辺としたときの高さが点Aの y 座標である。△AOBの高さを h とすると，$\frac{1}{2}\times5\times h=10$　　$h=4$　　よって，点Aの y 座標が4なので，$y=2x$ に代入して，$4=2x$ から，$x=2$　　A(2, 4)　　$a=xy$ なので，$a=2\times4=\underline{8}$

(2)　点Cの x 座標が-1だから，y 座標は，$\frac{8}{-1}=-8$　　C$(-1, -8)$　　よって，点Cと(4, 7)を通る直線の傾きは，$\{7-(-8)\}\div\{4-(-1)\}=3$　　$y=3x+b$ とおいて(4, 7)を代入すると，$7=12+b$　　$b=-5$　　よって，直線 l の式は，$\underline{y=3x-5}$

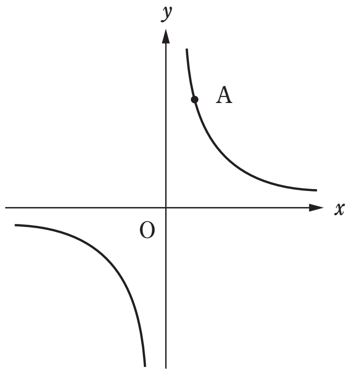
(3)　直線 l：$y=3x-5$ と直線 k：$y=2x$ との交点の x 座標は，方程式 $3x-5=2x$ の解だから，$x=5$　　よって，$y=10$　　交点の座標は，$\underline{(5, 10)}$

(4)　O(0, 0), C(−1, −8), B(5, 0)である。点Dのy座標は，$y=2\times(-1)=-2$　点Eのy座標は直線lの切片だから，(0, −5)　図形ODCEBの面積は，台形ODCEの面積と△BOEの面積の和として求められるから，$\frac{1}{2}\times(5+6)\times1+\frac{1}{2}\times5\times5=$**18(cm²)**



＜類題2＞　筑波大学附属高等学校

ひし形OABCの2つの頂点A，Cは反比例の関係$y=\frac{16}{x}$のグラフ上にある。点Aのx座標が2であるとき，ひし形OABCの面積を求めなさい。



【解法】

点Aのy座標は，$y=\frac{16}{2}=8$　よって，A(2, 8)

ひし形は4辺が等しい四角形なので，OC＝OAとなる。

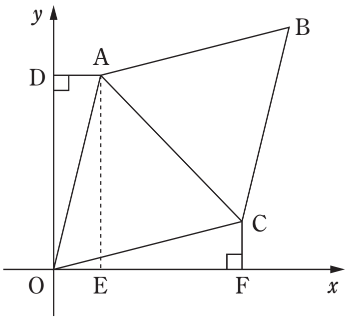
C(−2, −8)のときには，3点A，O，Cが一直線上に並ぶので，ひし形OABCはできない。

Cが(8, 2)または(−8, −2)にあるときにひし形OABCができる。ひし形OABCの面積は△OACの面積の2倍だから，△OACの面積を求めて2倍すればよい。

△OACの面積の求め方は何通りもあるが，次のように工夫するのもおもしろい。

右上図で，△OAC＝図形OFCAD−△OAD−△OCF＝長方形OEAD＋台形AEFC−(△OAD＋△OCF)＝台形AEFC$=\frac{1}{2}\times(2+8)\times6=30$

よって，$30\times2=$**60**



C(−8, −2)の場合は右下図で△OAC＝△ACE−△AOD−台形CEDO$=\frac{1}{2}\times10\times10-\frac{1}{2}\times2\times8-\frac{1}{2}\times(2+10)\times2=$30

よって，$30\times2=$**60**