

問題 P.84

- 3 (1) $2\sqrt{6}$ (2) $18\sqrt{2}$ (3) $\frac{63\sqrt{2}}{2}$

- 3 (1) 正四面体A-BCDにおいて、頂点Aから面BCDに下ろした垂線と面BCDの交点をHとすると、点Hは△BCDの重心になる。△BCDにおいて、BHとCDの交点をH'とすると、△BCH'は、それぞれの角が30°、60°、90°の直角三角形になる。この直角三角形について、三平方の定理より、 $BC : BH' = 2 : \sqrt{3}$ が成り立つので、

$$6 : BH' = 2 : \sqrt{3}$$

$$2BH' = 6\sqrt{3}$$

$$BH' = 3\sqrt{3}$$

正三角形の重心は、3本の中線の交点であり、各中線を2:1に内分するので、

$$BH = \frac{2}{3}BH' \quad BH = 2\sqrt{3}$$

△ABHにおいて三平方の定理を用いると、

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

- (2) 四面体A-BCDの体積は、 $\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times AH$ で求めることができる。

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times BH' \times CD = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 6 = 9\sqrt{3}$$

$$\text{よって、(四面体A-BCD)} = \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times AH = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2}$$

- (3) 求める立体の体積は、三角すいE-BFGの体積から、立体EMN-BCDの体積をひいたものになる。

点CからABに平行な直線をひき、EFとの交点をIとする。

△MAEと△MCIにおいて、

点MはACの中点だから、 $MA = MC$

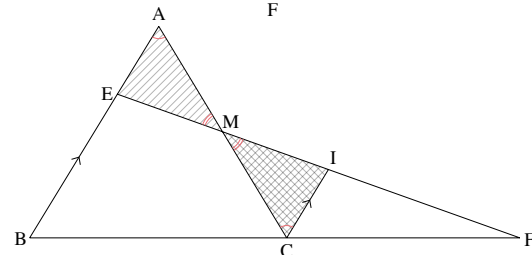
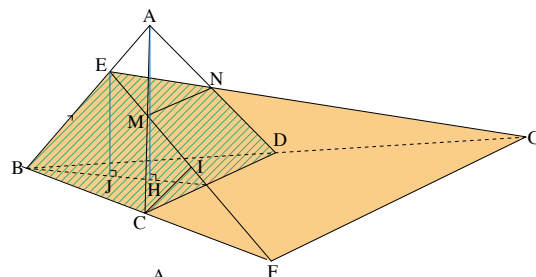
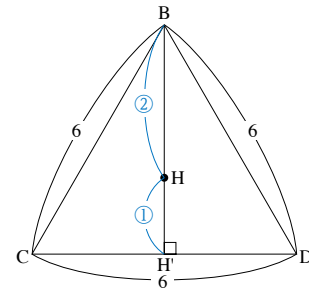
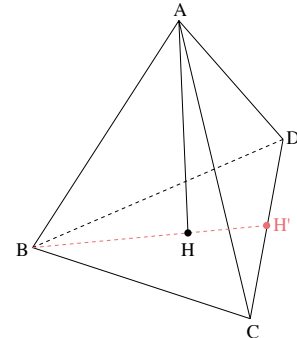
AE//ICより、平行線の錯角は等しいので、 $\angle MAE = \angle MCI$

対頂角は等しいので、 $\angle AME = \angle CMI$

以上より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle MAE \equiv \triangle MCI$

合同な図形の対応する辺は等しいから、 $CI = AE$

また、△FBEと△FCIにおいて、



共通の角なので, $\angle BFE = \angle CFI$

$AE \parallel IC$ より, 平行線の同位角は等しいので, $\angle FBE = \angle FCI$

2組の角がそれぞれ等しいから, $\triangle FBE \sim \triangle FCI$

よって, $FC : FB = CI : BE = AE : BE = 1 : 2$

$\triangle BCD \sim \triangle BFG$ で, 相似比は $BC : BF = 1 : 2$ だから, 面積比は,

$$\triangle BCD : \triangle BFG = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$$

よって, $\triangle BFG = 4\triangle BCD = 4 \times 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

点Eから面BFGへ垂線EJをひく。

$\triangle EBJ$ と $\triangle ABH$ において, $\angle EBJ = \angle ABH$ (共通), $\angle BJE = \angle BHA = 90^\circ$ より,

2組の角がそれぞれ等しいから, $\triangle EBJ \sim \triangle ABH$

$$BE : BA = EJ : AH = 2 : 3 \text{より, } EJ = AH \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{6} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$(\text{三角すいE-BFG}) = \frac{1}{3} \times \triangle BFG \times EJ = \frac{1}{3} \times 36\sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} = 48\sqrt{2}$$

$$(\text{立体EMN-BCD}) = (\text{三角すいA-BCD}) - (\text{立体A-EMN})$$

$$= 18\sqrt{2} - 18\sqrt{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= 18\sqrt{2} - \frac{18\sqrt{2}}{12}$$

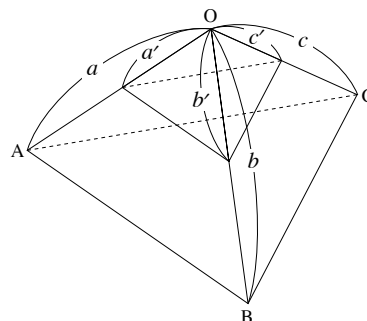
$$= 18\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{36\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{33\sqrt{2}}{2}$$

三角すい内にある小さな三角すいの体積は次の公式を用いて求められる。

$$(\text{三角すいO-ABC}) \times \frac{a'}{a} \times \frac{b'}{b} \times \frac{c'}{c}$$



よって,

$$(\text{立体MCF-NDG}) = (\text{三角すいE-BFG}) - (\text{立体EMN-BCD})$$

$$= 48\sqrt{2} - \frac{33\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{96\sqrt{2} - 33\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{63\sqrt{2}}{2}$$

65
60

6章 | 関数と図形の融合問題

問題 P.109

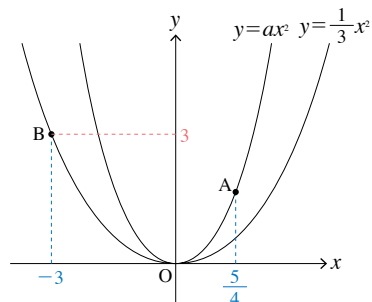
- 3 (1) $y=3$ (2) $a=\frac{4}{3}$ (3) $C(2, \frac{4}{3})$ (4) $x=\frac{3}{2}$ (5) -1 (6) $y=8$

- 3 (1) 点Bは $y=\frac{1}{3}x^2$ 上の点で、 x 座標が -3 であるから、
 $y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=-3$ を代入して、
 $y=\frac{1}{3} \times (-3)^2=3$

- (2) $y=ax^2$ ($a \neq 0$)において、 x の値が p から q まで増加
 するときの変化の割合は、 $a(p+q)$ であるから、

$$\begin{aligned} a\left(0+\frac{5}{4}\right) &= \frac{5}{3} \\ \frac{5}{4}a &= \frac{5}{3} \\ a &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- (3) $C(c, \frac{1}{3}c^2)$ とおく。与えられた条件より、
 $c+\frac{1}{3}c^2=\frac{10}{3}$
 $c^2+3c-10=0$
 $(c+5)(c-2)=0$
 $c>0$ より、 $c=2$
 よって、 $C(2, \frac{4}{3})$



$x=p$ のとき、 $y=ap^2$
 $x=q$ のとき、 $y=aq^2$
 変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量 }}{x \text{ の増加量 }}$
 $= \frac{aq^2 - ap^2}{q - p}$
 $= \frac{a(q^2 - p^2)}{q - p}$
 $= \frac{a(q+p)(q-p)}{q-p}$
 $= a(q+p)$

- (4) $\triangle O'A'C$ は右の図のようになる。(2)より、点Aの y 座標は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{3} \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{12} \\ \text{よって、} A\left(\frac{5}{4}, \frac{25}{12}\right) \end{aligned}$$

このとき、直線 $O'A'$ と直線 OA は平行だから、

その傾きは、 $\frac{\frac{25}{12}}{\frac{5}{4}} = \frac{5}{3}$ 変化の割合に等しい。

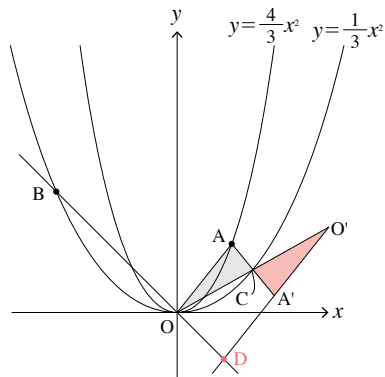
3点 O 、 C 、 O' は一直線上にあり、 $OC:OO'=1:2$ なので、 $C(2, \frac{4}{3})$ より、 $O'(4, \frac{8}{3})$ となる。

直線 $O'A'$ の式を、 $y=\frac{5}{3}x+b$ として、 $x=4$ 、 $y=\frac{8}{3}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} &= \frac{5}{3} \times 4 + b \\ b &= -4 \end{aligned}$$

よって、 $y=\frac{5}{3}x-4$ …① となる。

また、直線 OB の式は原点と $B(-3, 3)$ を通るから、 $y=-x$ …② となる。



点Dは、直線O'A'と直線OBの交点だから、①、②を連立して、

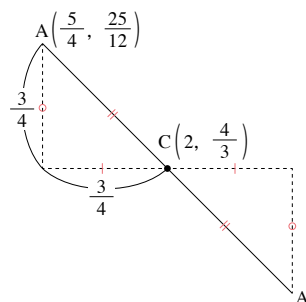
$$\begin{aligned}\frac{5}{3}x - 4 &= -x \\ \frac{8}{3}x &= 4 \\ x &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって、Dのx座標は、 $\frac{3}{2}$

- (5) 線分AA'の中点は点C $(2, \frac{4}{3})$ である。点Aと点Cのx座標の差は、 $2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$ なので、点A'のx座標は、 $2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ となる。点Aと点Cのy座標の差は、 $\frac{25}{12} - \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$ なので、点A'のy座標は、 $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$ となる。

よって、A' $(\frac{11}{4}, \frac{7}{12})$ となるので、求める傾きは、

$$\frac{\frac{7}{12} - \frac{25}{12}}{\frac{11}{4} - \frac{5}{4}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$



線分AA'の中点は点C $(2, \frac{4}{3})$ であり、AA'の傾き=ACの傾きと捉えることができる。

$$\begin{aligned}\text{よって、求める傾きは、} & \frac{\frac{4}{3} - \frac{25}{12}}{2 - \frac{5}{4}} = \frac{-\frac{9}{12}}{\frac{3}{4}} = -1 \\ & \text{と求めてもよい。}\end{aligned}$$

- (6) (5) より、OB//AA'であり、OC=O'Cであるから、中点連結定理より、点A'は線分O'Dの中点であることがわかる。つまり、 $\triangle BDA'$ と $\triangle O'A'E$ において、底辺をそれぞれ線分DA'、線分A'O'とみるとそれぞれの長さが等しいので、O'D//BEのとき、 $\triangle BDA'$ と $\triangle O'A'E$ の高さが等しくなるから、面積が等しくなる。

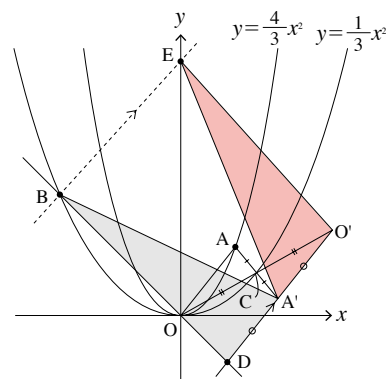
よって、O'D//BEが成り立つ。

直線BEの傾きは、E(0, e)とおくと、 $\frac{e-3}{0-(-3)} = \frac{e-3}{3}$ と表せる。

直線O'Dの傾きは $\frac{5}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{e-3}{3} &= \frac{5}{3} \\ e-3 &= 5 \\ e &= 8\end{aligned}$$

よって、点Eのy座標は8



65
60

6章 | 関数と図形の融合問題

問題 P.114

13 (1) $a = \frac{1}{4}$ (2) $b = -\frac{1}{2}$ (3) $\frac{64}{3}\pi$

13 (1) $A(-4, 4)$ は $y=ax^2$ 上の点だから, $4=a \times (-4)^2$ より, $a = \frac{1}{4}$

(2) $A(-4, 4)$, $C(-2, 0)$ より直線ACの傾きは, $\frac{0-4}{-2-(-4)} = -2$

直線ACの式を $y = -2x + n$ とすると,

$C(-2, 0)$ を通るから, $0 = 4 + n$ より, $n = -4$

よって, $D(0, -4)$

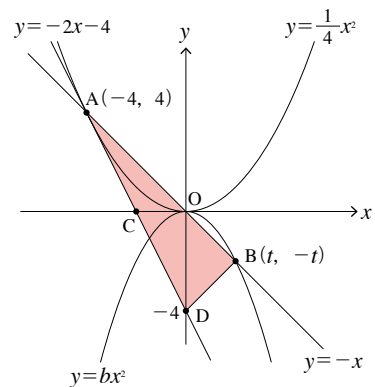
点Bのx座標を t とすると, $\triangle ADB$ は $\triangle OAD$ と $\triangle ODB$ の和である。

$\triangle OAD$ と $\triangle ODB$ は辺ODを底辺と考えると, それぞれ高さが4, t の三角形である。したがって,

$$\triangle ADB = \triangle OAD + \triangle ODB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times t = 8 + 2t = 12 \text{ より, } t = 2$$

点Bは $y = -x$ 上の点だから, $B(2, -2)$

よって, $-2 = b \times 2^2$ より, $b = -\frac{1}{2}$

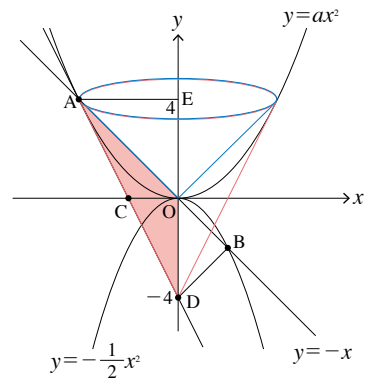


(3) 点Aからy軸にひいた垂線をAEとすると, 求める立体の体積は, $\triangle ADE$ をy軸を軸として1回転させてできる円すいと $\triangle OAE$ をy軸を軸として1回転させてできる円すいの体積の差に等しい。

$E(0, 4)$ より, $AE = EO = 4$, $ED = 4 - (-4) = 8$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 8 - \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 4 &= \frac{128}{3}\pi - \frac{64}{3}\pi \\ &= \frac{64}{3}\pi \end{aligned}$$



問題 P.115

14 (1) $a = -\frac{1}{4}$ (2) $y = 2x + 4$ (3) $x = \frac{-13 - 3\sqrt{33}}{4}$

14 (1) Bは②上の点なので、②に $y = -4$ を代入して、 $-4 = \frac{16}{x}$ より、 $x = \frac{16}{-4} = -4$
よって、 $B(-4, -4)$

Bは①上の点でもあるため、①に点Bの座標を代入して、

$$-4 = a \times (-4)^2$$

$$16a = -4$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

(2) ②に $x = 2$ を代入して、 $y = \frac{16}{2} = 8$

よって、 $C(2, 8)$

$B(-4, -4)$ 、 $C(2, 8)$ より、

$$\text{直線BCの傾きは、} y = \frac{8 - (-4)}{2 - (-4)} = \frac{12}{6} = 2$$

直線BCの式を $y = 2x + b$ として、点Cの座標を代入すると、

$$8 = 2 \times 2 + b \text{ より、} b = 8 - 4 = 4$$

よって、直線BCの式は、 $y = 2x + 4$

(3) ①に $x = 2$ を代入して、 $y = -\frac{1}{4} \times 2^2 = -1$

よって、 $A(2, -1)$

$$AC = 8 - (-1) = 9$$

y軸上の $y > 0$ の部分に $ED = AC = 9$ となる点Eをとると、

点Dは直線BCとy軸の交点なので $D(0, 4)$ より、

$$OE = OD + ED = OD + AC = 4 + 9 = 13 \text{ から、} E(0, 13)$$

Eを通り直線BCに平行な直線と②との

交点をPとすると、

$$\triangle PCD = \triangle ECD = \triangle ACD \text{ となる。}$$

PE//BCより直線PEは傾きが2、切片13の直線である。

よって、直線PEの式は、 $y = 2x + 13 \cdots ④$

②と④を連立して、

$$\frac{16}{x} = 2x + 13$$

$$2x^2 + 13x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 2 \times (-16)}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{297}}{4}$$

$$x = \frac{-13 \pm 3\sqrt{33}}{4}$$

$$x < -4 \text{ より、} x = \frac{-13 - 3\sqrt{33}}{4}$$

