

55 60

4章 | 図形の性質・計量

問題 P.66

- 5 (1) 21 (2) $\frac{49}{144}$ 倍

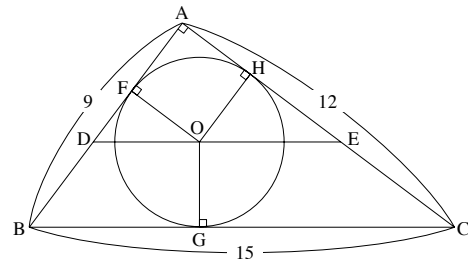
- 5 (1) 辺AB, BC, CAと円Oの接点をそれぞれF, G, Hとする。円の半径と接線は接点において垂直に交わるから, $OF \perp AB$, $OG \perp BC$, $OH \perp CA$ である。

ここで, $AB : BC = 9 : 15 = 3 : 5$ であるから, $\triangle ABC$ において, 三平方の定理より, $AB : CA : BC = 3 : 4 : 5$ となる。

よって, $AB : CA = 3 : 4$ より, $9 : CA = 3 : 4$

$$3CA = 36$$

$$CA = 12$$



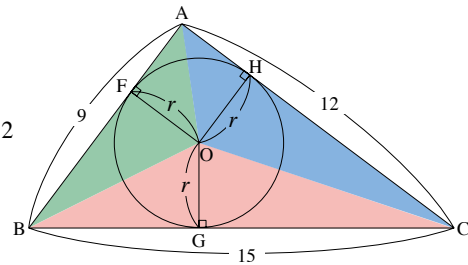
三平方の定理を用いて,
 $9^2 + CA^2 = 15^2$ $CA^2 = 12^2$
 $CA = 12$ と求めてもよい。

円Oの半径を r とすると, $\triangle ABC$ の面積について,

$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \triangle ABC$ より,

$$\frac{1}{2} \times 9 \times r + \frac{1}{2} \times 15 \times r + \frac{1}{2} \times 12 \times r = \frac{1}{2} \times 9 \times 12$$

$$\frac{9}{2}r + \frac{15}{2}r + 6r = 54 \quad 18r = 54 \quad r = 3$$



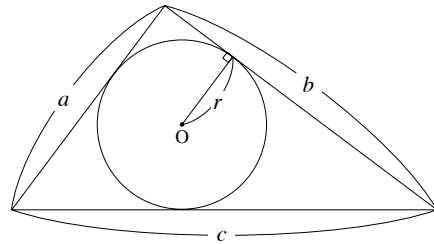
面積が S の三角形に関する公式

$$\frac{1}{2}r(a+b+c) = S \text{ を用いて求めてもよい。}$$

この問題の場合,

$$\frac{1}{2}r(9+15+12) = \frac{1}{2} \times 9 \times 12$$

$$r = 3$$



よって, $OF = OG = OH = 3$ である。

また, $\angle FAH = \angle AFO = \angle AHO = \angle FOH = 90^\circ$, $OF = OH = 3$ より, 四角形AFOHは正方形である。よって, $AF = AH = 3$, $OF \parallel CA$, $OH \parallel BA$ $\triangle ABC$ と $\triangle FDO$ において, $CA \parallel OF$, $BC \parallel DO$ より, $\triangle ABC \sim \triangle FDO$ であり, $FD : OF : DO = 3 : 4 : 5$ となる。

OF=3であるから、

FD : OF = 3 : 4より、FD : 3 = 3 : 4

$$4FD = 9$$

$$FD = \frac{9}{4}$$

OF : DO = 4 : 5より、3 : DO = 4 : 5

$$4DO = 15$$

$$DO = \frac{15}{4}$$

同様に、△ABCと△HOEにおいて、AB//HO、BC//OEより、△ABC∽△HOEであり、HO : EH : OE = 3 : 4 : 5、HO = 3となるから、

HO : EH = 3 : 4より、3 : EH = 3 : 4

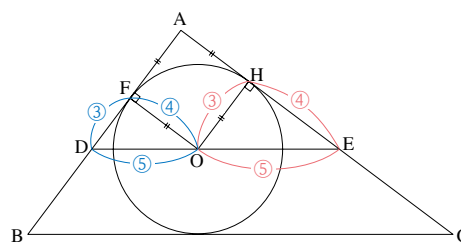
$$EH = 4$$

HO : OE = 3 : 5より、3 : OE = 3 : 5

$$OE = 5$$

よって、△ADEの周の長さは、

$$AF + FD + DO + OE + EH + HA = 3 + \frac{9}{4} + \frac{15}{4} + 5 + 4 + 3 = 21$$



DE//BCより、△ADE∽△ABC

相似比は、AE : EC = 7 : 12であるから、
周の長さの比も7 : 12となる。

したがって、求めたい周の長さをxとおくと、

$$x : (9 + 12 + 15) = 7 : 12 \quad x : 36 = 7 : 12$$

$$12x = 36 \times 7 \quad x = 21 \text{と求めてもよい。}$$

(2) まず、△ADEの面積を求める。

(1)より、AF=3、FD = $\frac{9}{4}$ なので、AD = AF + FD = $3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$

AH=3、HE=4だから、AE = AH + HE = 3 + 4 = 7

したがって、△ADEの面積は、 $\frac{1}{2} \times \frac{21}{4} \times 7 = \frac{147}{8}$

また、△ABCの面積は、 $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$

よって、 $\frac{147}{8} \div 54 = \frac{49}{144}$ となるから、△ADEの面積は△ABCの面積の $\frac{49}{144}$ 倍。

△ADEと△ABCの相似比は、7 : 12であるから、

$$\text{面積比は、} 7^2 : 12^2 = 49 : 144$$

よって、△ADEの面積は△ABCの面積の $\frac{49}{144}$ 倍と求めてもよい。

55 60

5章 | 空間図形

問題 P.88

7 $\frac{7}{16}$ 倍

7 側面の展開図は右図のようになる。

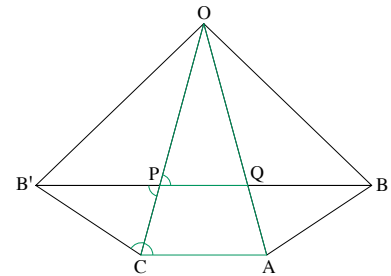
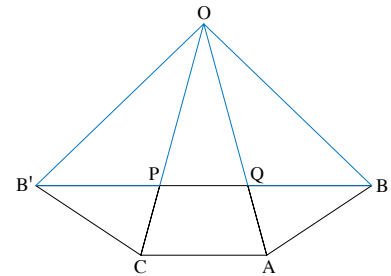
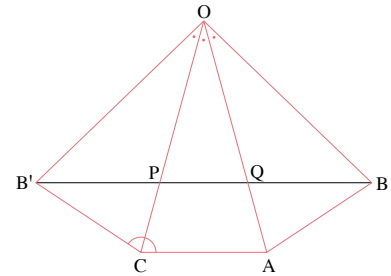
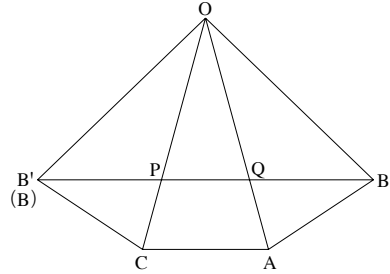
立体O-ABCの側面の展開図をかく。BとB' (B)を結んだ直線とOC, OAの交点が, BP(B'P) + PQ+QBが最小となるときの点P, Qである。

$\triangle OB'B$ は $OB'=OB=12\text{cm}$ の二等辺三角形であり, 二等辺三角形の底角は等しいから, $\angle OB'P=\angle OBQ\cdots\textcircled{1}$

$\triangle OB'C$ と $\triangle OBA$ において, $OB'=OB=12\text{cm}$, $OC=OA=12\text{cm}$, $B'C=BA=6\text{cm}$ より, 3組の辺がそれぞれ等しいから, $\triangle OB'C\equiv\triangle OBA$ であり, 合同な図形の対応する角は等しいので, $\angle B'OC=\angle BOA\cdots\textcircled{2}$ 同様に, $\triangle OB'C$ と $\triangle OAC$ において, $OB'=OA=12\text{cm}$, 共通な辺なので, $OC=12\text{cm}$, $B'C=AC=6\text{cm}$ より, 3組の辺がそれぞれ等しいから, $\triangle OB'C\equiv\triangle OAC$ であり, 合同な図形の対応する角は等しいので, $\angle OCB'=\angle OCA\cdots\textcircled{3}$

また, $\triangle OB'P$ と $\triangle OBQ$ において, $\textcircled{1}$ と $OB'=OB=12\text{cm}$, $\textcircled{2}$ より $\angle B'OP=\angle BOQ$ 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから, $\triangle OB'P\equiv\triangle OBQ$

さらに, $\triangle OCA$ と $\triangle OPQ$ において, $OC:OP=OA:OQ$, $\angle COA=\angle POQ$ (共通)より, 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので, $\triangle OCA\sim\triangle OPQ$ 相似な図形の対応する角は等しいから, $\angle OCA=\angle OPQ\cdots\textcircled{4}$ また, 対頂角は等しいので, $\angle OPQ=\angle B'PC\cdots\textcircled{5}$ $\textcircled{3}\sim\textcircled{5}$ より, $\angle B'PC=\angle B'CP$



したがって、 $\triangle OB'C$ と $\triangle B'CP$ は相似な二等辺三角形となる。

よって、 $OB' : B'C = B'C : CP$

$$12 : 6 = 6 : CP$$

$$12CP = 36$$

$$CP = 3(\text{cm})$$

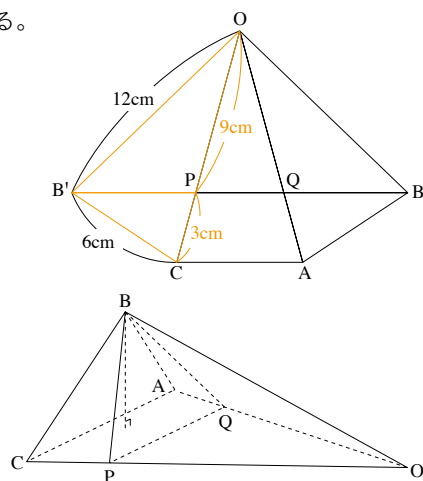
となるから、 $OP = OC - CP = 12 - 3 = 9(\text{cm})$

以上から、 $\triangle OCA$ と $\triangle OPQ$ の相似比は、 $OC : OP = 12 : 9 = 4 : 3$ となるので、面積比は、 $4^2 : 3^2 = 16 : 9$ である。

よって、 $\triangle OCA : \text{四角形PCAQ} = 16 : (16 - 9) = 16 : 7$
正三角すい $O-ABC$ と四角すい $B-PCAQ$ の底面をそれぞれ $\triangle OAC$ 、四角形 $PCAQ$ と考えると、高さは頂点 B から底面に下ろした垂線となるので、体積比は底面の面積比に等しくなる。したがって、

$$\begin{aligned} (\text{正三角すい}O-ABC\text{の体積}) : (\text{四角すい}B-PCAQ\text{の体積}) &= \triangle OCA : \text{四角形PCAQ} \\ &= 16 : 7 \end{aligned}$$

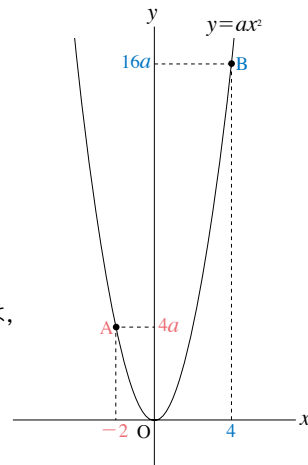
より、 $\frac{7}{16}$ 倍となる。



問題 P.113

- 9 (1) $2a$ (2) $a = -\frac{5}{4}$ (3) $CA : AB = 1 : 3, 40\pi$

- 9 (1) 点Aは関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点だから、
 $y=ax^2$ に $x=-2$ を代入して、
 $y=a \times (-2)^2 = 4a$
 よって、 $A(-2, 4a)$
 また、点Bも関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点だから、
 $y=ax^2$ に $x=4$ を代入して、
 $y=a \times 4^2 = 16a$
 よって、 $B(4, 16a)$
 したがって、 x の値が -2 から 4 まで増加するときの変化の割合は、
 $\frac{16a-4a}{4-(-2)} = \frac{12a}{6} = 2a$



変化の割合は、 $\frac{y \text{ の増加量 }}{x \text{ の増加量 }}$ で求められる。

- (2) (1)で求めた変化の割合が $\frac{5}{2}$ であるから、 $2a = \frac{5}{2}$ より、 $a = \frac{5}{4}$

- (3) (2)より、 $a = \frac{5}{4}$ だから、 $A(-2, 5), B(4, 20)$

直線ABの傾きは x の値が -2 から 4 まで増加するときの変化の割合に等しいから、
 直線ABの式は切片を b として、 $y = \frac{5}{2}x + b$ と表せる。これに点Aの座標 $A(-2, 5)$ を代入して、

$$5 = \frac{5}{2} \times (-2) + b \text{ より、 } b = 10$$

よって、直線ABの式は、 $y = \frac{5}{2}x + 10$

さらに、点Cは x 軸上の点だから、 $y = 0$

点Cは直線AB上の点だから、 $y = \frac{5}{2}x + 10$ に $y = 0$ を代入して、

$$0 = \frac{5}{2}x + 10 \text{ より、 } x = -4$$

よって、 $C(-4, 0)$

ここで、点Aを通り、 y 軸に平行な直線と x 軸との交点を A_x 、

点Bを通り、 y 軸に平行な直線と x 軸との交点を B_x とすると、

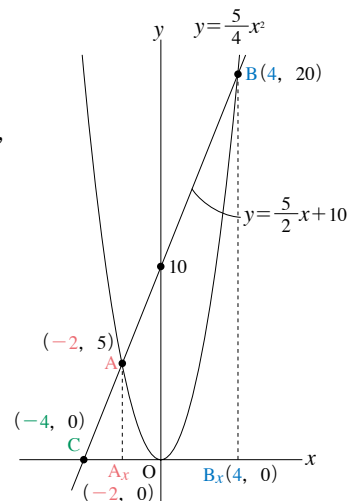
A_x, B_x の x 座標は点A、Bの x 座標に等しいから、

$A_x(-2, 0), B_x(4, 0)$ である。

このとき、 $AA_x // BB_x$ であり、平行線で区切られた線分の比は等しいので、

$$CA : AB = CA_x : A_xB_x = \{-2 - (-4)\} : \{4 - (-2)\}$$

$$= 2 : 6 = 1 : 3$$



また、点Aを通り、 x 軸に平行な直線と y 軸との交点を A_y とすると、 $A_y(0, 5)$ である。さらに、直線ABと y 軸の交点をDとすると、点Dの座標は、 $D(0, 10)$ である。

このとき、 $\triangle OAC$ を y 軸を中心に1回転させてできる立体は、 $\triangle ODC$ を y 軸を中心に1回転してできる円すいPから、 $\triangle OAA_y$ を y 軸を中心に1回転させてできる円すいQと、 $\triangle DAA_y$ を y 軸を中心に1回転させてできる円すいRを除いた図形となる。

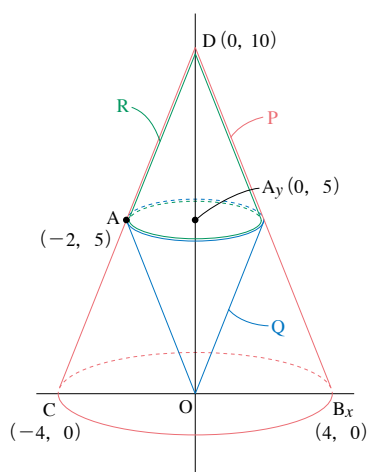
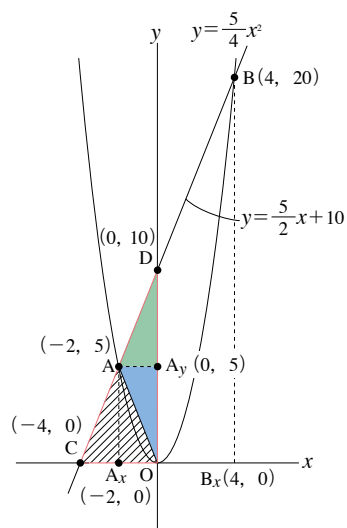
円すいP(底面の半径=4, 高さ=10)の体積は、
 $\frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times \pi \times 10 = \frac{160}{3} \pi$

円すいQ(底面の半径=2, 高さ=5)の体積は、
 $\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \pi \times 5 = \frac{20}{3} \pi$

円すいR(底面の半径=2, 高さ=10-5=5)の体積は、
 $\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \pi \times 5 = \frac{20}{3} \pi$

よって、 $\triangle OAC$ を y 軸を中心に1回転させてできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} \text{円すいP} - \text{円すいQ} - \text{円すいR} &= \frac{160}{3} \pi - \frac{20}{3} \pi - \frac{20}{3} \pi \\ &= 40 \pi \end{aligned}$$



55 60

6章 | 関数と図形の融合問題

問題 P.114

10 (1) $a = -2$ (2) $OH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$

10 (1) 点Bは直線 $y = x - 3$ 上の点だから、 $y = x - 3$ に点Bの座標を代入すると、

$$\begin{aligned} a &= -\frac{a}{2} - 3 \\ \frac{3}{2}a &= -3 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

(2) (1)より、点Bの座標は $\left(-\frac{a}{2}, a\right)$ なので、 $B(1, -2)$ とわかる。

次に、点Aの座標を求める。点Aは放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = x - 3$ の交点なので
 $y = -2x^2$ と $y = x - 3$ を連立して、

$$-2x^2 = x - 3$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

解の公式を用いて、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm 5}{4} \\ &= 1, -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

たすき掛けを用いて右図のよう
に考えて計算してもよい。

$$2x^2 + 1x - 3 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 1, -\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \times & \times \end{array} = 3 \\ \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ \parallel & \parallel \end{array} + \\ \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ \parallel & \parallel \end{array} - 2 \\ \hline \end{array}$$

点Bの座標は $(1, -2)$ であるから、 $x = -\frac{3}{2}$ が点Aの x 座標である。

$y = x - 3$ に $x = -\frac{3}{2}$ を代入して、 $y = -\frac{3}{2} - 3 = -\frac{9}{2}$ よって、 $A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ とわかる。

ここで、 OH を $\triangle OAB$ の高さ、 AB を $\triangle OAB$ の底辺とみると、

$\triangle OAB$ の面積は、 $\frac{1}{2} \times AB \times OH$ と表せる。

右図のように新たに $Q(1, -\frac{9}{2})$ をとり、 $\triangle ABQ$ に三平方の定理を用いると、

$$AB = \sqrt{\left\{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^2 + \left\{\left(-2\right) - \left(-\frac{9}{2}\right)\right\}^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

したがって、

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times OH = \frac{5\sqrt{2}}{4} OH \cdots \textcircled{1}$$

一方、直線 $y=x-3$ の y 切片を点 P とおくと、

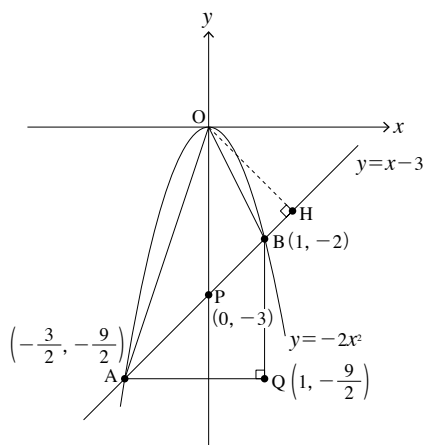
$P(0, -3)$ である。また、 $\triangle OAB$ は $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ の和である。

$\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ について、 $OP=3$ を底辺とする三角形と考えると、高さはそれぞれ $\frac{3}{2}$ 、 1 だから、

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \triangle OAP + \triangle OBP \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{3}{2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{15}{4} \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

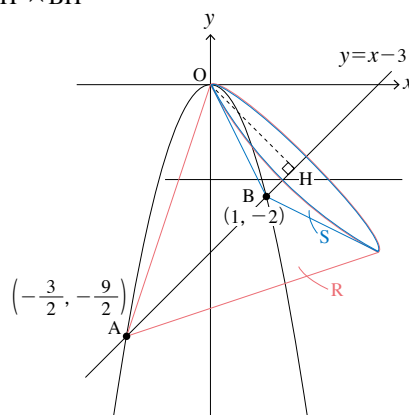
$$\textcircled{1} \text{と} \textcircled{2} \text{が等しいから、} \frac{5\sqrt{2}}{4} OH = \frac{15}{4}$$

$$\text{これを解いて、} OH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



(3) 求める立体は、底面の半径が OH 、高さが AH の円すい R から、底面の半径が OH 、高さが BH の円すい S を除いた立体である。よって、求める立体の体積は、

$$\begin{aligned} \text{円すい} R - \text{円すい} S &= \frac{1}{3} \times \pi \times OH^2 \times AH - \frac{1}{3} \times \pi \times OH^2 \times BH \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times OH^2 \times (AH - BH) \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times OH^2 \times AB \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{15\sqrt{2}}{4} \pi \end{aligned}$$



点 H は直線 $y=x-3$ 上の点なので、 x 座標を h とすると、 y 座標は $h-3$ となる。

$$OH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{なので、} \sqrt{h^2 + (h-3)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$4h^2 - 12h + 9 = 0$$

$$(2h-3)^2 = 0$$

よって、 $h = \frac{3}{2}$ とわかる。

したがって、 $H(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ より、点 B と点 H の位置関係がわかる。